Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Cycle 5 – Modélisation de la cinématique d'un système complexe

Table des matières

Cinématique du point / cinématique du solide

I

1. Point coïncidant – vecteur position et trajectoire

1.1. Point coïncidant

Définition

Un point M, appartenant au solide S_k en mouvement par rapport à un repère R_i, coïncide à chaque instant avec un point $M_i(t)$ du repère R_i. Ce point est dit coïncidant du point M à l'instant t. M est appelé *point mobile* et $M_i(t)$ est appelé *point coïncidant à l'instant t.*

1.2. Vecteur position

Définition

La position du point M, appartenant au solide S_k en mouvement par rapport à un repère de référence R_i, est variable avec le temps. Soit O_i un point fixe du repère R_i, le vecteur $\overrightarrow{O_iM_i}$, variable avec le temps, est appelé vecteur-position du point M relativement au repère R_i.

1.3. Trajectoire

Définition

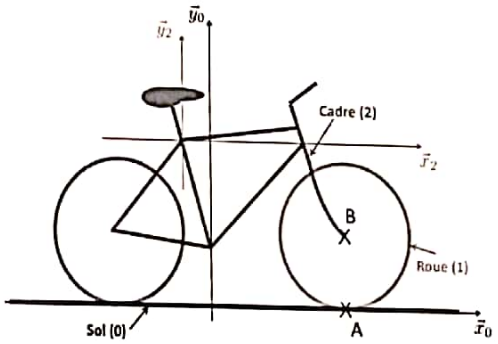
La trajectoire d'un point M d'un solide S_k en mouvement par rapport à un repère de référence R_i est l'ensemble des points $M_i(t)$ coïncidant à chaque instant avec le point M au cours du déplacement du solide S_k.

Remarque

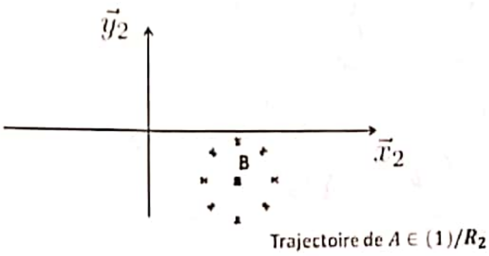
La trajectoire, extrémité du vecteur-position, dépend du repère de référence R_i.

Exemple

Cas de la bicyclette, étude de la trajectoire du point A appartenant à la roue (1).



Étude de la trajectoire du point A appartenant à la roue (1)



Trajectoire du point A appartenant à la roue (1) par rapport au repère lié au cadre (2)

La trajectoire du point A appartenant à la roue (1) par rapport au repère lié au cadre (2) est un cercle de centre B et de rayon AB.

Trajectoire du point A appartenant à la roue (1) par rapport au repère lié au sol (0)

La trajectoire du point A appartenant à la roue (1) par rapport au repère lié au sol (0) est une cycloïde.

Il est donc nécessaire de toujours préciser le repère de référence pour caractériser la trajectoire d'un point.

2. Champ des vecteurs-vitesse et des vecteurs-accélération

Considérons tous les points d'un solide S_k au cours de son déplacement par rapport à un repère R_i. À un instant donné, considérons les vecteurs-vitesse et les vecteurs-accélération de tous ces points :

- l'ensemble de ces vecteurs-vitesse constitue le champ des vecteurs-vitesse du solide en mouvement ;
- l'ensemble de ces vecteurs-accélération constitue le champ des vecteurs-accélération du solide en mouvement.

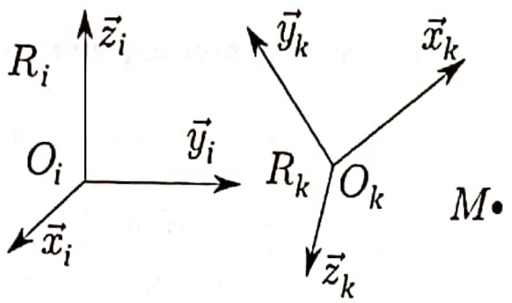
L'étude des mouvements particuliers (translation, rotation) montre que la connaissance du vecteur-vitesse (vecteur-accélération) d'un point appartenant à un solide permet d'obtenir les vecteurs-vitesse (vecteurs-accélération) de tous les autres points du solide.

2.1. Rappels de cinématique du point (cours de physique)

En cinématique du point, on étudie le mouvement d'un solide en étudiant le mouvement d'un point particulier M de ce solide par rapport à un référentiel d'observation $R_k\,(O_k, \vec{x_k}, \vec{y_k}, \vec{z_k})$. Ce point particulier est souvent choisi comme étant le centre de gravité G du solide.

Vitesse d'un point d'un solide dans un référentiel

Soit le point M et deux repères R_i et R_k, définis selon la figure ci-dessous. Le point M n'est lié à aucun des deux repères, il est donc possible d'étudier son mouvement par rapport au repère R_i et/ou au repère R_k.



Par définition, la vitesse d'un point M *par rapport au référentiel* $R_k\,(O_k, \vec{x_k}, \vec{y_k}, \vec{z_k})$ est égale à la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{O_kM(t)}$ en utilisant la base $\mathcal{B}_k$ comme base de dérivation :

$$\vec{V}\,(M/R_k) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_kM(t)}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_k}$$

De même, par définition, la vitesse d'un point M *par rapport à un référentiel* $R_i\,(O_i, \vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i})$ est égale à la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{O_iM(t)}$ en utilisant la base $\mathcal{B}_i$ comme base de dérivation :

$$\vec{V}\,(M/R_i) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_iM(t)}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i}$$

Remarque

- le vecteur vitesse du point M à l'instant t par rapport à un repère donné est tangent à la trajectoire au point M(t) dans ce même repère ;
- lors du calcul du vecteur vitesse d'un point par rapport à un référentiel donné, le vecteur position qui sera dérivé doit avoir pour point origine un point fixe dans ce référentiel ;
- lorsque l'on dérive un vecteur, il est indispensable de préciser la base de dérivation (cf. « Rappels et compléments mathématiques »). Lors du calcul du vecteur vitesse d'un point par rapport à un référentiel donné, la base de dérivation est la base associée à ce référentiel.

Les deux référentiels R_k et R_i étant en mouvement l'un par rapport à l'autre, les deux vitesses $\vec{V}\,(M/R_i)$ et $\vec{V}\,(M/R_k)$ sont différentes. Cependant, elles sont liées par la relation suivante (la démonstration est donnée à titre indicatif en annexe) :

$$\vec{V}\,(M/R_i) = \vec{V}\,(O_k/R_i) + \overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}\,(R_k/R_i) + \vec{V}\,(M/R_k)$$

- $\vec{V}\,(M/R_i)$ est la vitesse du point M pour un observateur lié au repère R_i;
- $\vec{V}\,(M/R_k)$ est la vitesse du point M pour un observateur lié au repère R_k;
- $\vec{\Omega}\,(R_k/R_i)$ est le vecteur vitesse de rotation du repère R_k par rapport au repère R_i (cf. poly « Rappels et compléments mathématiques ») ;

- Le terme restant, $\vec{V}(O_k/R_i) + \overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}(R_k/R_i)$ est appelé « vitesse d'entraînement » du point M dans le mouvement du repère R_k par rapport au repère R_i, noté $\vec{V}(M, R_k/R_i)$. Il s'agit de la vitesse qu'aurait le point M s'il était physiquement attaché au repère R_k et que l'on observait son mouvement par rapport au repère R_i.

Fondamental : Propriété du vecteur vitesse d'entraînement

$$\vec{V}(M, R_k/R_i) = -\vec{V}(M, R_i/R_k)$$

Accélération d'un point d'un solide dans un référentiel

Par définition, l'accélération d'un point M par rapport à un référentiel $R_k\,(O_k, \vec{x_k}, \vec{y_k}, \vec{z_k})$ est égale à la dérivée du vecteur vitesse $\vec{V}(M/R_k)$ en utilisant la base $\mathcal{B}_k$ comme base de dérivation :

$$\vec{\Gamma}(M/R_k) = \left(\frac{d\vec{V}(M/R_k)}{dt}\right)_{\mathcal{B}_k}$$

De même, par définition, l'accélération d'un point M par rapport à un référentiel $R_i\,(O_i, \vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i})$ est égale à la dérivée du vecteur vitesse $\vec{V}(M/R_i)$ en utilisant la base $\mathcal{B}_i$ comme base de dérivation :

$$\vec{\Gamma}(M/R_i) = \left(\frac{d\vec{V}(M/R_i)}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i}$$

De même que précédemment, si le référentiel R_k est en mouvement par rapport à un référentiel R_i, on peut relier ces deux accélérations. La relation et la démonstration sont données en annexe à titre indicatif, elles ne sont pas à connaître par cœur.

2.2. Cinématique du solide

En cinématique du solide, nous allons maintenant étudier le mouvement d'un point A, appartenant physiquement au solide S_k, auquel est associé le repère R_k.

Pour éviter toute ambiguïté, le vecteur vitesse et le vecteur accélération du point A appartenant à S_k par rapport au repère R_i seront alors notés $\vec{V}(A, S_k/R_i)$ et $\vec{\Gamma}(A, S_k/R_i)$

Cette notation permet de distinguer :

- la vitesse d'un point A appartenant au solide S_k (et se déplaçant avec lui), notée $\vec{V}(A, S_k/R_i)$;
- la vitesse d'un point A de l'espace n'appartenant à aucun solide, notée $\vec{V}(A/R_i)$.

Exemple

Dans l'exemple de la bicyclette traité précédemment, on distingue le point A appartenant à la roue (1) et le point A, point de contact entre la roue et le sol. Ces deux points n'ont ni la même trajectoire ni la même vitesse.

Vecteur vitesse de rotation

Ce vecteur est utilisé pour représenter la rotation de deux repères l'un par rapport à l'autre. On note :

- $\overrightarrow{\Omega}(R_k/R_i)$ le vecteur vitesse de rotation du repère R_k par rapport au repère R_i;
- $\overrightarrow{\Omega}(R_i/R_k)$ le vecteur vitesse de rotation du repère R_i par rapport au repère R_k.

Ce vecteur est défini par :

- sa direction, qui est l'axe de rotation des deux repères l'un par rapport à l'autre ;
- sa norme, qui est égale à la vitesse de rotation (en $rad.s^{-1}$), c'est-à-dire à la dérivée de l'angle (en rad) paramétrant la position des deux repères ;
- son sens, qui doit être soigneusement défini par rapport à l'axe de rotation.

Exemple

soit deux repères $R_2\left(O,\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_2}\right)$ et $R_1\left(O,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1}\right)$, avec R_2 en rotation d'angle θ_{21} autour de $\vec{z_1}=\vec{z_2}$ par rapport à R_1 selon la figure ci-contre.

On voit que l'angle θ_{21} est orienté *de 1 vers 2* (de $\vec{x_1}$ vers $\vec{x_2}$ et de $\vec{y_1}$ vers $\vec{y_2}$, il est donc bien représentatif de la rotation de la base 2 (mobile) par rapport au repère 1 (fixe).

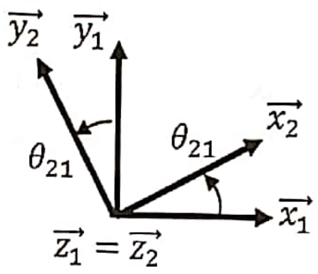


Figure plane de changement de base

On peut alors définir le vecteur vitesse de rotation de R_2 par rapport à R_1 : $\overrightarrow{\Omega}(R_2/R_1)=\dot{\theta}_{21}\cdot\vec{z_1}$

Si on souhaite définir le *vecteur vitesse de rotation de* R_1 *(mobile) par rapport à* R_2 *(fixe)*, la direction est identique et l'angle relatif entre les deux repères est le même, mais il sera cette fois orienté *de 2 vers 1* (donc compté négativement). D'où : $\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_2)=-\dot{\theta}_{21}\cdot\vec{z_1}$

Champ des vecteurs-vitesse d'un solide par rapport à un référentiel

Le point A est toujours un point physiquement lié au solide S_k. L'expression de la vitesse de ce point A, appartenant au solide S_k, par rapport au repère R_i s'écrit (le point M est remplacé dans l'expression par le point A, S_k) :

$$\vec{V}(A,S_k/R_i)=\vec{V}(O_k/R_i)+\overrightarrow{AO_k}\wedge\overrightarrow{\Omega}(R_k/R_i)+\vec{V}(A,S_k/R_k)$$

Le point A appartenant ici au solide S_k, il n'a aucun mouvement par rapport au repère R_k et $\vec{V}(A,S_k/R_k)=\vec{0}$.

Le point O_k étant l'origine du repère R_k, il est physiquement lié à ce repère et on note sa vitesse par rapport au repère R_i : $\vec{V}(O_k/R_i)=\vec{V}(O_k,S_k/R_i)$.

Fondamental

Le champ des vecteurs-vitesse du solide S_k par rapport au repère R_i s'écrit donc :

$$\vec{V}(A, S_k/R_i) = \vec{V}(O_k, S_k/R_i) + \overrightarrow{AO_k} \wedge \vec{\Omega}(R_k/R_i)$$

2.3. Champs des vecteurs accélérations d'un solide par rapport à un référentiel

En utilisant les résultats de l'annexe, on peut écrire l'accélération du point A, appartenant au solide S_k, par rapport au repère R_i (le point M est remplacé dans l'expression par la point A, S_k) :

$$\vec{\Gamma}(A, S_k/R_i) = \vec{\Gamma}(O_k/R_i) + \left(\frac{d\vec{\Omega}(R_k/R_i)}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} \wedge \overrightarrow{O_kA} + \vec{\Omega}(R_k/R_i) \wedge \left(\vec{\Omega}(R_k/R_i) \wedge \overrightarrow{O_kA}\right) +$$
$$2\vec{\Omega}(R_k/R_i) \wedge \vec{V}(A, S_k/R_k) + \vec{\Gamma}(A, S_k/R_k)$$

De même que $\vec{V}(A, S_k/R_k) = \vec{0}$, on a $\vec{\Gamma}(A, S_k/R_k) = \vec{0}$.

$$\vec{\Gamma}(A, S_k/R_i) = \vec{\Gamma}(O_k, S_k/R_i) + \left(\frac{d\vec{\Omega}(R_k/R_i)}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} \wedge \overrightarrow{O_kA} + \vec{\Omega}(R_k/R_i) \wedge \left(\vec{\Omega}(R_k/R_i) \wedge \overrightarrow{O_kA}\right)$$

Ce n'est donc pas un champ de moment de torseurs, à cause du dernier terme du membre de droite.

3. Torseur cinématique

3.1. Définition du torseur cinématique

Nous venons de montrer que le champ des vecteurs-vitesse pour tout point A appartenant au solide S_k par rapport à un repère R_i s'écrit :

$$\vec{V}(A, S_k/R_i) = \vec{V}(O_k, S_k/R_i) + \overrightarrow{AO_k} \wedge \vec{\Omega}(R_k/R_i)$$

Ce champ est antisymétrique, c'est donc le champ de moments d'un torseur appelé *TORSEUR CINÉMATIQUE* (cf. cours « Rappels et compléments mathématiques », pour la définition de l'outil mathématique « Torseur » et de ses propriétés).

D'après la formule précédente, on identifie $\vec{V}(A, S_k/R_i)$ et $\vec{\Omega}(R_k/R_i)$ comme étant *les éléments de réduction* de ce torseur.

Résultante du torseur cinématique :	*Moment au point A du torseur cinématique :*
$\vec{\Omega}(R_k/R_i)$	$\vec{V}(A, S_k/R_i)$
Indépendant du point A choisi pour exprimer le torseur cinématique.	*Dépendant du point A* choisi pour exprimer le torseur cinématique
Vecteur vitesse de rotation du repère R_k par rapport au repère R_i	Vecteur vitesse du point A appartenant au solide S_k par rapport au repère R_i
Unité : $rad.s^{-1}$	Unité : $m.s^{-1}$

Le torseur cinématique caractéristique du mouvement du solide S_k par rapport au solide S_i, s'écrit *au point A* :

$$\{\mathcal{V}(S_k/R_i)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(R_k/R_i) \\ \vec{V}(A, R_k/R_i) \end{array} \right\}_A$$

et pour simplifier les notations, on notera $((S_k = R_k = k \text{ et } S_i = R_i = i))$:

$$\{\mathcal{V}(k/i)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(k/i) \\ \vec{V}(A, k/i) \end{array} \right\}_A$$

Le torseur cinématique est défini pour tout instant t.

Fondamental

Connaissant l'expression du torseur cinématique au point A, il est possible d'en déduire son expression en tout point B (relation de changement de point) :

$$\{\mathcal{V}(k/i)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(k/i) \\ \vec{V}(B, k/i) = \vec{V}(A, k/i) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(k/i) \end{array} \right\}_B$$

Il n'est pas nécessaire que le point B soit physiquement un point du solide S_k. Il faut et il suffit qu'il soit « considéré comme fixe » dans le repère R_k lié au solide S_k.

3.2. Composition des vitesses

Toutes les démonstrations des propriétés ci-dessous sont données en annexe. Les propriétés sont à connaître par cœur mais les démonstrations ne sont pas exigibles.

Composition des vecteurs-vitesse de rotation

La relation de composition des vitesses de rotation, démontrée en annexe, s'écrit : $\vec{\Omega}(k/i) = \vec{\Omega}(k/j) + \vec{\Omega}(j/i)$.

Fondamental

En Sciences de l'Ingénieur, les systèmes étudiés comportent en général un grand nombre de solides en mouvements relatifs. La composition des vitesses peut alors être généralisée sous la forme :

$$\vec{\Omega}(n/0) = \vec{\Omega}(n/n-1) + \vec{\Omega}(n-1/n-2) + \ldots + \vec{\Omega}(1/0)$$

Composition des vecteurs-vitesse en A

La relation de composition des vecteurs vitesses s'écrit : $\vec{V}(A,k/i) = \vec{V}(A,k/j) + \vec{V}(A,j/i)$.

Fondamental

En Sciences de l'Ingénieur, les systèmes étudiés comportent en général un grand nombre de solides en mouvements relatifs. La composition des vitesses peut alors être généralisée sous la forme :

$$\vec{V}(A,n/0) = \vec{V}(A,n/n-1) + \vec{V}(A,n-1/n-2) + \ldots + \vec{V}(A,1/0)$$

Composition des torseurs cinématiques

A partir des deux relations démontrées précédemment, on obtient la relation de composition des torseurs cinématiques ou *composition des mouvements* : $\{\mathcal{V}(k/i)\} = \{\mathcal{V}(k/j)\} + \{\mathcal{V}(j/i)\}$

Fondamental

La relation précédente peut être généralisée au cas d'un solide S_n en mouvement par rapport à n référentiels R_0 à R_{n-1} sous la forme :

$$\{\mathcal{V}(n/0)\} = \{\mathcal{V}(n/n-1)\} + \{\mathcal{V}(n-1/n-2)\} + \ldots + \{\mathcal{V}(1/0)\}$$

Remarque : Sommation de torseurs au même point de réduction

L'addition des composantes de deux torseurs ne peut se faire que s'ils ont été tous les deux écrits *au même point*.

3.3. Axe instantané de viration

Définition : Axe central d'un torseur

Nous avons vu que tout torseur dont la résultante n'est pas nulle possède un axe central (Δ). Il s'agit de l'ensemble des points pour lesquels le champ résultant est colinéaire au moment résultant. L'axe central est une droite parallèle à la résultante du torseur (cf. poly "Rappels et compléments mathématiques").

Conséquence sur le torseur cinématique

Soit S_k un solide en mouvement par rapport à un repère R_i. Si $\overrightarrow{\Omega}(k/i) \neq \overrightarrow{0}$, alors le torseur cinématique du mouvement du solide S_k par rapport au repère R_i, $\{\mathcal{V}(k/i)\}$, admet un axe central (Δ). Cet axe est appelé axe instantané de viration dans le mouvement de S_k par rapport à R_i. Il est défini à tout instant t.

Propriétés de l'axe instantané de viration

D'après les propriétés générales de l'axe central d'un torseur, on peut déduire les propriétés de l'axe instantané de viration du mouvement de S_k par rapport à R_i, noté (Δ) :

- le moment central du torseur cinématique $\overrightarrow{V}(I,k/i)$ est colinéaire à la résultante du torseur cinématique en tout point I de l'axe instantané de viration ;
- le moment central du torseur cinématique $\overrightarrow{V}(I,k/i)$ est le même en tout point I de l'axe instantané de viration.

Des propriétés particulières de l'axe instantané de viration du mouvement d'un solide par rapport à un repère dans le cas d'un mouvement plan sur plan seront étudiées dans la suite de ce cours.

Torseurs cinématiques de liaisons usuelles et propriétés

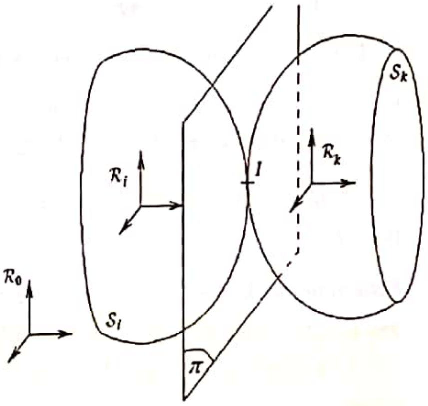
II

1. Cinématique du contact ponctuel entre solides

Vitesse de glissement

Soient deux solides S_i et S_k en contact par les surfaces qui les limitent et R_i et R_k les repères respectivement associés à ces solides.

Les deux surfaces sont tangentes en un point I et *le contact est ponctuel.* On note (π) le plan tangent commun aux deux solides au point I et $\vec{n}$ le vecteur normal à ce plan passant par I.



Solides en contact ponctuel au point I

Définition

On appelle vitesse de glissement du solide S_k par rapport au solide S_i, dans le repère R_0, au point I le vecteur :

$$\vec{G}_{R_0}(I) = \vec{V}(I,k/0) - \vec{V}(I,i/0)$$

La vitesse de glissement est la différence des vecteurs-vitesse des molécules des solides S_i et S_k qui sont en contact au point I, donc de deux vecteurs-vitesse instantanée. Elle dépend donc du temps.

Propriété 1 : la vitesse de glissement est indépendante du repère de référence.

En effet nous pouvons écrire :

$$\vec{G}_{R_0}(I) = \vec{V}(I,k/0) - \vec{V}(I,i/0) = \vec{V}(I,k/i)$$

et $\vec{G}_{R_n}(I) = \vec{V}(I,k/n) - \vec{V}(I,i/n) = \vec{V}(I,k/i)$

donc $\vec{G}_{R_0}(I) = \vec{G}_{R_1}(I) = \ldots = \vec{G}_{R_n}(I)$.

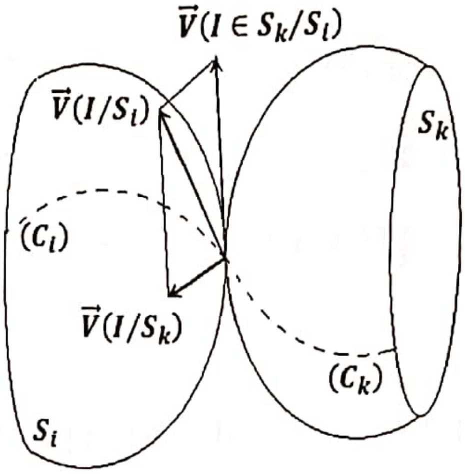
C'est pourquoi la vitesse de glissement est notée $\vec{V}(I, k/i)$.

Propriété 2 : la vitesse de glissement du solide S_k par rapport au solide S_i, au point I, est contenue dans le plan tangent commun (π).

Démonstration :

Soit I le point géométrique de contact. Au cours du mouvement, le point I se déplace sur les solides S_i et S_k. Il décrit sur S_i une courbe (C_i) et sur S_k une courbe (C_k). Nous savons que :

- $\vec{V}(I/i)$ est porté par la tangente à (C_i) en I ;
- $\vec{V}(I/k)$ est porté par la tangente à (C_k) en I.



Vecteur vitesse de glissement du solide Sk par rapport au solide Si au point I

De plus ces deux tangentes sont dans le plan tangent commun aux deux solides S_i et S_k au point I. Or, d'après la composition des vitesses au point I, nous avons : $\vec{V}(I/i) = \vec{V}(I, k/i) + \vec{V}(I/k)$. Ces trois vecteurs sont donc coplanaires (car les trois côtés d'un triangle sont dans un même plan).

Ceci implique bien que la vitesse de glissement appartient au plan tangent commun aux solides S_i et S_k au point I.

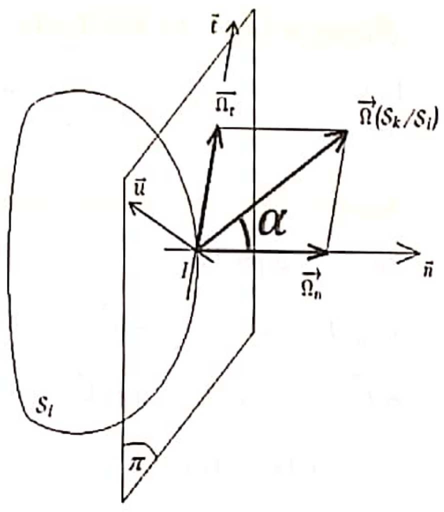
Remarque sur la condition cinématique de maintien du contact : si le vecteur vitesse de glissement n'appartient pas au plan tangent commun aux solides S_i et S_k au point I, alors, cela signifie que les solides S_i et S_k s'éloigne ou s'interpénètrent. Dans ce cas-là, le maintien du contact entre les solides au cours du temps n'est pas assuré.

La condition cinématique de maintien du contact s'écrit donc : $\vec{V}(I, k/i).\vec{n} = 0$.

Vecteur roulement – vecteur pivotement

Soient $\overrightarrow{\Omega_T}(k/i)$ et $\overrightarrow{\Omega_N}(k/i)$ les projections de $\vec{\Omega}(k/i)$, respectivement, sur le plan (π), plan tangent commun aux deux solides S_i et S_k et sur la normale $\vec{n}$ à ce plan.

- $\overrightarrow{\Omega_N}(k/i)$ est appelé vecteur-pivotement du solide S par rapport au solide S_i ;
- $\overrightarrow{\Omega_T}(k/i)$ est appelé vecteur-roulement du solide S_k par rapport au solide S_i.



D'après la figure, nous pouvons écrire :

- $\overrightarrow{\Omega_N}(k/i) = (\vec{\Omega}(k/i).\vec{n}).\vec{n}$;

- $\overrightarrow{\Omega_T}(k/i) = (\vec{n} \wedge \overrightarrow{\Omega}(k/i)) \wedge \vec{n}$.

Vecteur roulement et vecteur pivotement du solide Sk par rapport au solide Si

Les cas particuliers courants

	$\vec{V}(I \in S_k/S_i) = \vec{0}$	$\vec{V}(I \in S_k/S_i) \neq \vec{0}$
$\overrightarrow{\Omega_N}(S_k/S_i) = \vec{0}$ $\overrightarrow{\Omega_T}(S_k/S_i) = \vec{0}$	Adhérence	Glissement pur
$\overrightarrow{\Omega_N}(S_k/S_i) \neq \vec{0}$ $\overrightarrow{\Omega_T}(S_k/S_i) = \vec{0}$	Pivotement sans glissement (pivotement pur)	Glissement avec pivotement
$\overrightarrow{\Omega_N}(S_k/S_i) = \vec{0}$ $\overrightarrow{\Omega_T}(S_k/S_i) \neq \vec{0}$	Roulement sans glissement (roulement pur)	Glissement avec roulement
$\overrightarrow{\Omega_N}(S_k/S_i) \neq \vec{0}$ $\overrightarrow{\Omega_T}(S_k/S_i) \neq \vec{0}$	Roulement avec pivotement sans glissement	Glissement avec roulement et pivotement

Un cas particulier fréquemment rencontré est le cas du roulement sans glissement (contact d'une roue sur le sol, engrènement, ...). La condition cinématique de roulement sans glissement du solide S_k par rapport au solide S_i s'écrit : $\vec{V}(I, k/i) = \vec{0}$.

2. Liaison glissière

Définition : Torseur cinématique associé à un mouvement de translation

Si un solide S_k est animé d'un mouvement de translation par rapport au repère R_i, alors le torseur cinématique caractérisant le mouvement de S_k par rapport à R_i s'écrit sous la forme suivante :

$$\{\mathcal{V}(k/i)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(k/i) = \vec{0} \\ \vec{V}(A, k/i) \neq \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

Ce torseur est un *torseur couple*.

D'après la relation de changement de point :

$$\forall A \in (S_k), \forall B \in (S_k), \text{nous avons : } \vec{V}(B, k/i) = \vec{V}(A, k/i) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(k/i)$$

Nous avons donc $\vec{V}(B, k/i) = \vec{V}(A, k/i)$.

Complément

- une condition nécessaire et suffisante pour qu'un solide S_k soit animé d'un mouvement de translation par rapport à un repère R_i est donc que tous les points du solide S_k aient le même vecteur vitesse par rapport au repère R_i à l'instant t

- réciproquement, à tout instant t, le champ des vecteurs-vitesse des points d'un solide S_k en translation par rapport à un repère R_i est uniforme (tous les points ont le même vecteur vitesse). La connaissance d'un seul vecteur-vitesse suffit à caractériser les vecteurs-vitesse de tous les points du solide S_k

Définition : Vecteur accélération

Les mêmes propriétés peuvent être mises en évidence concernant les vecteurs-accélération des points d'un solide S_k en translation par rapport à un repère R_i. On en déduit de ce qui vient d'être vu l'équivalence suivante :

$$\vec{V}(B,k/i) = \vec{V}(A,k/i) \Leftrightarrow \vec{\Gamma}(B,k/i) = \vec{\Gamma}(A,k/i)$$

$\Leftrightarrow S_k$ en translation par rapport à R_i.

Attention

La propriété mise en évidence ci-dessus n'est vraie que si les points A et B sont des points quelconques. Par prudence, il vaut mieux vérifier cette relation pour deux couples de points non alignés.

3. Liaison pivot

Définition : Torseur cinématique associé à un mouvement de rotation

Si un solide S_k est animé d'un mouvement de rotation par rapport au repère R_i, alors le vecteur-vitesse du point M, appartenant au solide S_k, par rapport au repère R_i s'écrit, d'après la relation de changement de point $\vec{V}(M,k/i) = \vec{V}(O_k,k/i) + \overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}(k/i)$.

Or $\vec{V}(O_k,k/i) = \vec{0}$, puisque le point O_k appartient à l'axe de rotation. Donc le champ des vecteurs-vitesse pour un solide en rotation autour d'un axe fixe s'écrit : $\vec{V}(M,k/i) = \overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}(k/i)$.

Le torseur cinématique caractérisant le mouvement de S_k par rapport à R_i a alors la forme suivante :

$$\{\mathcal{V}(k/i)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(k/i) \\ \vec{V}(M,k/i) = \overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}(k/i) \end{array} \right\}_M$$

Ce torseur est un *torseur glisseur.*

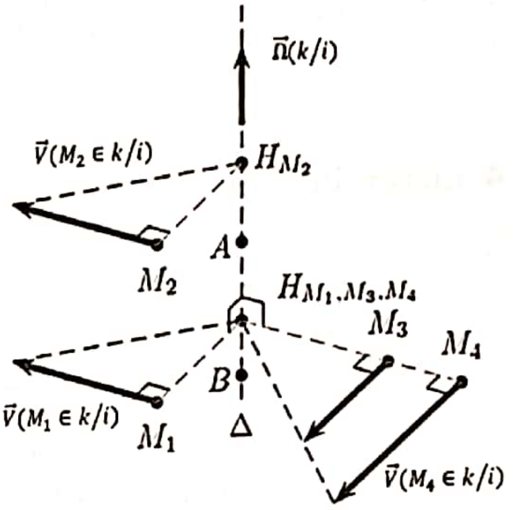
Complément

Quel que soit le point M_1 appartenant au solide S_k pour lequel on cherche à déterminer le vecteur-vitesse $\overrightarrow{V}(M_1,k/i)$, il existe un point H_{M_1}, projection orthogonale de M_1 sur l'axe de rotation Δ. On a alors la relation suivante :

$$\overrightarrow{V}(M_1,k/i) = \overrightarrow{M_1H_{M_1}} \wedge \overrightarrow{\Omega}(k/i)$$

avec $\overrightarrow{\Omega}(k/i) \perp \overrightarrow{H_{M_1}M_1}$.

La norme du-vecteur vitesse $\vec{V}(M_1,k/i)$ est donc égale à $\|\overrightarrow{V}(M_1,k/i)\| = \|\overrightarrow{M_1H_{M_1}}\|.\|\overrightarrow{\Omega}(k/i)\|$.



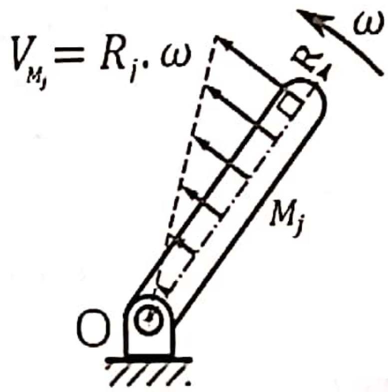
Propriétés particulières du champ des vecteurs vitesse du solide Sk en rotation par rapport au repère Ri autour de son axe

On pose :

- $R_1 = \|\overrightarrow{H_{M_1}M_1}\|$, distance du point M_1 à l'axe de rotation Δ;
- $\omega = \dot{\theta} = \|\overrightarrow{\Omega}(k/i)\|$, avec ω la norme de la vitesse de rotation du solide S_k par rapport au repère R_i et θ l'angle de rotation du solide S_k par rapport au repère R_i.

Alors $\|\overrightarrow{V}(M_1,k/i)\| = R_1.\omega = R_1.\dot{\theta}$.

On peut en déduire que la norme du vecteur-vitesse d'un point M_j, appartenant à un solide S_k en rotation par rapport à un repère R_i, est proportionnelle à la distance du point M_j à l'axe de rotation (Δ).



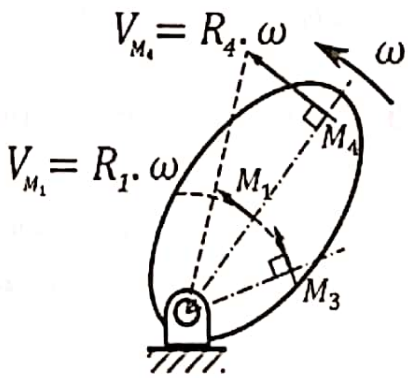
Complément

Le premier complément permet d'écrire pour un point M_1 $\|\overrightarrow{V}(M_1,k/i)\| = R_1.\omega$ et pour le point M_4 $\|\overrightarrow{V}(M_4,k/i)\| = \|\overrightarrow{M_4H_{M_4}}\|.\|\overrightarrow{\Omega}(k/i)\| = R_4.\omega$. On en déduit :

$$\frac{\|\overrightarrow{V}(M_1,k/i)\|}{\|\overrightarrow{V}(M_4,k/i)\|} = \frac{R_1}{R_4}$$

On peut en déduire que :

- tous les points situés à une même distance de l'axe de rotation (Δ) ont des vecteurs-vitesse de même norme (cas des points M_1, M_2 et M_3) ;



- tous les points situés sur une même génératrice parallèle à l'axe de rotation ont des vecteurs-vitesse de même direction, même sens et même norme (cas des points M_1 et M_2 sur la figure).

4. Liaison hélicoïdale

Définition : Torseur cinématique associé à un mouvement hélicoïdal

Le vecteur-vitesse d'un point M quelconque, appartenant au solide S_k en mouvement hélicoïdal par rapport au repère R_i s'écrit $\vec{V}(M,k/i) = \vec{V}(O_k,k/i) + \overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}(k/i)$.

Or, le vecteur-vitesse de rotation entre les repères R_i et R_k s'exprime $\vec{\Omega}(k/i) = \dot{\theta}.\vec{z_k}$ et la vitesse du point O_k situé sur l'axe de rotation peut se calculer par dérivation du vecteur position :

$$\vec{V}(O_k,k/i) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_iO_k}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} = \dot{Z}.\vec{z_k}, \text{ car } \overrightarrow{O_iO_k} = Z.\vec{z_k}$$

De plus, nous avons posé la relation $Z = \lambda.\theta$, ce qui permet d'aboutir à l'expression $\vec{V}(O_k,k/i) = \dot{Z}.\vec{z_k} = \lambda.\dot{\theta}\vec{z_k} = \lambda.\vec{\Omega}(k/i)$.

Le vecteur-vitesse d'un point M quelconque, appartenant au solide S_k en mouvement hélicoïdal par rapport au repère R_i s'écrit alors sous la forme $\vec{V}(M,k/i) = \lambda.\vec{\Omega}(k/i) + \overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}(k/i)$, caractérisant le mouvement de S_k par rapport à R_i a alors la forme suivante :

$$\{\mathcal{V}(k/i)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(k/i) \\ \vec{V}(M,k/i) = \lambda.\vec{\Omega}(k/i) + \overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}(k/i) \end{Bmatrix}_M$$

Complément

Dans le cas d'un solide S_k en mouvement hélicoïdal par rapport à un repère R_i, il découle des résultats précédents la propriété suivante :

Tous les points I appartenant à l'axe (Δ_k) ont le même vecteur-vitesse porté par cet axe : $\vec{V}(I,k/i) = \dot{Z}.\vec{z_k} = \lambda.\dot{\theta}\vec{z_k} = \lambda.\vec{\Omega}(k/i)$.

5. Tableau des liaisons normalisées

Une liaison cinématique entre deux solides est caractérisée par les degrés de liberté autorisés ; elle permet donc de déduire les mouvements relatifs entre ces solides.

Soit $\{\mathcal{V}(k/i)\}$, le torseur cinématique caractérisant le mouvement du solide S_k par rapport au solide S_i :

$$\{\mathcal{V}(k/i)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(k/i) \\ \vec{V}(M,k/i) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_x & \dot{x} \\ \dot{\theta}_y & \dot{y} \\ \dot{\theta}_z & \dot{z} \end{Bmatrix}_{M,\mathcal{B}_i}$$

Si une au moins des six composantes de $\{\mathcal{V}(k/i)\}$ est nulle ou s'il existe au moins une relation entre certaines composantes, on dit qu'il existe une liaison entre les deux solides S_k et S_i. Dans le cas contraire, les solides S_k et S_i ne sont pas liés entre eux. *Une liaison entre deux solides annule p degrés de liberté ou mouvements (avec* $0 < p \leq 6$*).*

Il est important de préciser que les liaisons définissent des mouvements possibles entre deux solides, sans aucune indication quant à leur réalisation matérielle.

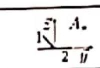
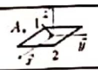
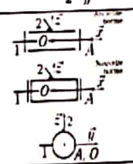
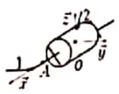
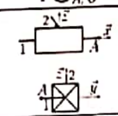
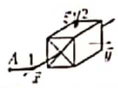
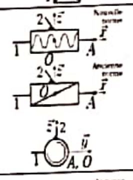
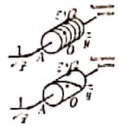
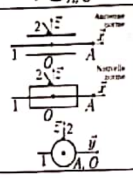
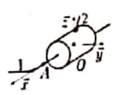
Le tableau ci-dessous vient compléter le tableau des liaisons normalisées donné au premier cycle de cinématique.

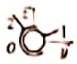
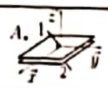
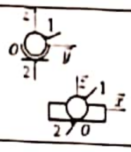
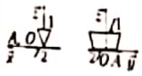
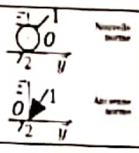
Il fait apparaître les liaisons usuelles normalisées, leur schématisation en vue(s) géométrale(s) et en perspective, leurs caractéristiques géométriques, leur torseur cinématique associé et les particularités de ce dernier.

Dans ce tableau, chaque torseur cinématique associé à une liaison est écrit dans un repère particulier judicieusement choisi.

Pour rappel, les hypothèses sont les suivantes :

- les solides S_i et S_k sont indéformables et en mouvement relatif ;
- les surfaces de liaison entre les deux solides S_i et S_k sont géométriquement parfaites et leur positionnement géométrique relatif parfait ;
- les solides S_i et S_k sont en contact sans aucun jeu ;
- un repère $R(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ est associé à chaque liaison.

Nb. ddl	Désignation (norme AFNOR)	Schématisation		Caractéristiques géométriques	Torseur cinématique associé exprimé dans la base $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Particularité du torseur cinématique
		2D	3D			
0	Liaison encastrement (liaison fixe)			Aucune	$\{\mathcal{V}(S_k/S_i)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{B}}$	Valable $\forall A$
1	Liaison pivot			Axe $(O, \vec{x})$	$\{\mathcal{V}(S_k/S_i)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{B}}$	Valable $\forall A \in$ axe $(O, \vec{x})$
1	Liaison glissière			Direction $\vec{x}$	$\{\mathcal{V}(S_k/S_i)\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{B}}$	Valable $\forall A$
1	Liaison hélicoïdale			Axe $(O, \vec{x})$	$\{\mathcal{V}(S_k/S_i)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{B}}$	Valable $\forall A \in$ axe $(O, \vec{x})$, $V_x = \pm \frac{p}{2\pi} \omega_x$
2	Liaison pivot glissant			Axe $(O, \vec{x})$	$\{\mathcal{V}(S_k/S_i)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{B}}$	Valable $\forall A \in$ axe $(O, \vec{x})$

2	*Liaison sphérique à doigt*			Centre O + plan de la rainure + direction du doigt	$\{\mathcal{V}(S_k/S_i)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{O,\mathcal{B}}$	Uniquement valable au point O, centre de la sphère
3	*Liaison sphérique (liaison rotule)*			Centre O	$\{\mathcal{V}(S_k/S_i)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{O,\mathcal{B}}$	Uniquement valable au point O, centre de la sphère
3	*Liaison appui plan*			Normale $\vec{z}$	$\{\mathcal{V}(S_k/S_i)\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{B}}$	Valable ∀A
4	*Liaison sphère-cylindre (liaison linéaire annulaire)*			Axe $(O,\vec{x})$	$\{\mathcal{V}(S_k/S_i)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{O,\mathcal{B}}$	Uniquement valable au point O, centre de la sphère
4	*Liaison cylindre-plan (liaison linéaire rectiligne)*			Droite de contact $(O,\vec{y})$ + normale du plan tangent au contact	$\{\mathcal{V}(S_k/S_i)\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{B}}$	Valable ∀A∈ au plan $(O,\vec{y},\vec{z})$
5	*Liaison sphère-plan (liaison ponctuelle)*			Point de contact O+ normale du plan tangent au contact	$\{\mathcal{V}(S_k/S_i)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{B}}$	Valable ∀A∈ axe $(O,\vec{z})$

6. Cas particulier de la modélisation plane

Intérêt de la modélisation plane

Généralement, la résolution analytique spatiale d'un problème de cinématique conduit à l'écriture de 6 équations scalaires. Mais dans le cas des problèmes plans (ou ramenés dans le plan), seules 3 équations scalaires sont nécessaires. Il est donc préférable de traiter dès le départ le problème dans le plan.

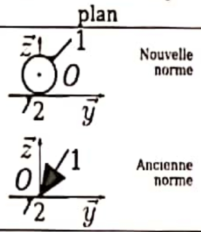
L'écriture des torseurs s'en trouve simplifiée ainsi que la résolution.

Modélisation plane des liaisons normalisées

Dans l'écriture du torseur cinématique plan d'une liaison, seules subsistent, par rapport au torseur cinématique spatial :

- la composante du vecteur rotation qui est perpendiculaire au plan ;
- les deux composantes du vecteur vitesse qui sont contenues dans le plan.

Exemple : liaison ponctuelle de normale $(O,\vec{z})$ modélisée dans le plan $(O,\vec{y},\vec{z})$

	Schéma cinématique plan	Torseur cinématique dans l'espace	Torseur cinématique dans le plan $(O,\vec{y},\vec{z})$
Liaison sphère-plan (liaison ponctuelle)		$\{\mathcal{V}(S_k/S_i)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{O,\mathcal{B}}$	$\{\mathcal{V}(S_k/S_i)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & - \\ - & V_y \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{O,\mathcal{B}}$

Conditions permettant de ramener un problème spatial à un problème plan

Conditions liées à la structure du mécanisme

- le mécanisme admet un plan de symétrie ;
- le mécanisme n'est animé que de mouvements plans parallèles ;
- le mécanisme ne comprend que des liaisons dont les composantes des vitesses sont comprises dans le plan (ou dans des plans parallèles) et des rotations d'axes perpendiculaires au plan ;
- il n'existe aucune translation de direction perpendiculaire au plan dans lequel on se ramène.

ATTENTION, ces conditions sont nécessaires mais pas toujours suffisantes.

Hypothèse simplificatrice permettant de ramener un problème spatial à un problème plan dans le cas de la présence d'une liaison hélicoïdale : si le mécanisme possède une liaison hélicoïdale dont l'axe est contenu dans le plan considéré, la rotation de la vis n'est donc pas visible et on ne prend en compte que la translation de l'écrou (mais cette dernière reste dépendante de la rotation de la vis).

Annexes

III

1. Rappels et compléments de cinématique du point : vecteurs vitesse

On cherche à écrire une relation entre la vitesse du point M par rapport au référentiel R_k et la vitesse du point M par rapport au référentiel R_i toutes deux définies de la façon suivante :

$$\vec{V}(M/k) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_kM}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_k} ; \vec{V}(M/i) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_iM}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i}$$

La relation de Chasles permet d'ecrire : $\overrightarrow{O_iM} = \overrightarrow{O_iO_k} + \overrightarrow{O_kM}$ d'où :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O_iM}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_iO_k}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_kM}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i}$$

La formule du changement de base de dérivation permet alors d'obtenir :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O_iM}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_iO_k}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_kM}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_k} + \vec{\Omega}(k/i) \wedge \overrightarrow{O_kM}$$

En observant que $\left(\frac{d\overrightarrow{O_kM}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_k} = \vec{V}(M/k)$ et que $\left(\frac{d\overrightarrow{O_iO_k}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} = \vec{V}(O_k/i)$, on obtient :

$$\vec{V}(M/i) = \vec{V}(M/k) + \vec{V}(O_k/i) + \vec{\Omega}(k/i) \wedge \overrightarrow{O_kM}$$

Pour simplifier la suite des démonstrations, on réécrit le produit vectoriel et on pose $\vec{V}(M, k/i)$ la vitesse d'entrainement du point M dans le mouvement du repère R_k par rapport au repère R_i :

$$\vec{V}(M, k/i) = \vec{V}(O_k/i) + \vec{\Omega}(k/i) \wedge \overrightarrow{O_kM} = \vec{V}(O_k/i) + \overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}(k/i)$$

Soit: $\vec{V}(M/i) = \vec{V}(M/k) + \vec{V}(M, k/i)$

Propriété du vecteur vitesse d'entrainement : $\vec{V}(M, k/i) = -\vec{V}(M, i/k)$

Démonstration : on prouve la propriété cherchée en additionnant membre à membre les deux expressions suivantes :

$$\vec{V}(M/i) = \vec{V}(M/k) + \vec{V}(M, k/i)$$

$$\vec{V}(M/k) = \vec{V}(M/i) + \vec{V}(M, i/k)$$

2. Rappels et compléments de cinématique du point : vecteurs accélération

Par définition : $\vec{\Gamma}(M/i) = \left(\dfrac{d\vec{V}(M/i)}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i}$,

avec $\vec{V}(M/i) = \vec{V}(M/k) + \vec{V}(O_k/i) + \vec{\Omega}(k/i) \wedge \overrightarrow{O_kM}$

Soit: $\vec{\Gamma}(M/i) = \left(\dfrac{d\vec{V}(M/k)}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} + \left(\dfrac{d\vec{V}(O_k/i)}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} + \left(\dfrac{d\left(\vec{\Omega}(k/i) \wedge \overrightarrow{O_kM}\right)}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i}$

La formule du changement de base de dérivation permet alors d'obtenir :

$$\left(\frac{d\vec{V}(M/k)}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} = \left(\frac{d\vec{V}(M/k)}{dt}\right)_{\mathcal{B}_k} + \vec{\Omega}(k/i) \wedge \vec{V}(M/k) = \vec{\Gamma}(M/k) + \vec{\Omega}(k/i) \wedge \vec{V}(M/k)$$

donc $\vec{\Gamma}(M/i) = \vec{\Gamma}(O_k/i) + \left(\dfrac{d\vec{\Omega}(k/i)}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} \wedge O_k\vec{M} + \vec{\Omega}(k/i) \wedge \left(\dfrac{d\overrightarrow{O_kM}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} + \vec{\Gamma}(M/k) + \vec{\Omega}(k/i) \wedge \vec{V}(M/k)$

Et comme : $\left(\dfrac{d\overrightarrow{O_kM}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{O_kM}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_k} + \vec{\Omega}(k/i) \wedge \overrightarrow{O_kM}$, alors :

$\vec{\Gamma}(M/i) = \vec{\Gamma}(O_k/i) + \left(\dfrac{d\vec{\Omega}(k/i)}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} \wedge \overrightarrow{O_kM} + \vec{\Omega}(k/i) \wedge \vec{V}(M/k) + \vec{\Omega}(k/i) \wedge \left(\vec{\Omega}(k/i) \wedge \overrightarrow{O_kM}\right) +$
$\vec{\Gamma}(M/k) + \vec{\Omega}(k/i) \wedge \vec{V}(M/k)$

On obtient finalement :

$\vec{\Gamma}(M/i) = \vec{\Gamma}(O_k/i) + \left(\dfrac{d\vec{\Omega}(k/i)}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} \wedge O_k\vec{M} + 2\vec{\Omega}(k/i) \wedge \vec{V}(M/k) + \vec{\Omega}(k/i) \wedge \left(\vec{\Omega}(k/i) \wedge \overrightarrow{O_kM}\right) +$
$\vec{\Gamma}(M/k)$

- $\vec{\Gamma}(M/i)$, vecteur accélération du point M par rapport au repère R_i ;
- $\vec{\Gamma}(M/k)$, vecteur accélération du point M par rapport au repère R_k ;
- $\vec{\Gamma}(M, k/i) = \vec{\Gamma}(O_k/i) + \left(\dfrac{d\vec{\Omega}(k/i)}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} \wedge O_k\vec{M} + \vec{\Omega}(k/i) \wedge \left(\vec{\Omega}(k/i) \wedge \overrightarrow{O_kM}\right)$, *accélération d'entraînement* du point M dans le mouvement du repère R_k par rapport au repère R_i;
- $2\vec{\Omega}(k/i) \wedge \vec{V}(M/k)$, vecteur *accélération de CORIOLIS*.

3. Composition des vecteurs-vitesse au point A, et des vecteurs-vitesse de rotation

Soit un solide S_k, lié à un repère $R_k(O_k, \vec{x_k}, \vec{y_k}, \vec{z_k})$, en mouvement par rapport à deux référentiels $R_j(O_j, \vec{x_j}, \vec{y_j}, \vec{z_j})$ et $R_i(O_i, \vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i})$. On souhaite établir le lien entre le champ des vecteurs-vitesses du solide S_k par rapport au repère R_j et celui du solide S_k par rapport au repère R_i.

$\vec{V}(A, k/i) = \left(\dfrac{d\overrightarrow{O_iA}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{O_iO_j}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} + \left(\dfrac{d\overrightarrow{O_jA}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{O_iO_j}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} + \left(\dfrac{d\overrightarrow{O_jA}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_j} + \vec{\Omega}(j/i) \wedge$
$\overrightarrow{O_jA}$

On peut écrire que :

- $\vec{\Omega}(j/i) \wedge \overrightarrow{O_jA} = \overrightarrow{AO_j} \wedge \vec{\Omega}(j/i)$;
- $\left(\dfrac{d\overrightarrow{O_iO_j}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_i} = \vec{V}(O_j/i) = \vec{V}(O_j, j/i)$ et $\left(\dfrac{d\overrightarrow{O_jA}}{dt}\right)_{\mathcal{B}_j} = \vec{V}(A, k/j)$.

Donc $\vec{V}(A, k/i) = \vec{V}(O_j, j/i) + \vec{V}(A, k/j) + \overrightarrow{AO_j} \wedge \vec{\Omega}(j/i)$.

En observant que : $\vec{V}(O_j, j/i) + \overrightarrow{AO_j} \wedge \vec{\Omega}(j/i) = \vec{V}(A, j/i)$, on obtient la relation de composition des vitesses :

$$\vec{V}(A, k/i) = \vec{V}(A, k/j) + \vec{V}(A, j/i)$$

Composition des vecteurs-vitesse de rotation :

La relation obtenue précédemment peut être écrite en tous points A et B de S_k :

$$\vec{V}(A, k/i) = \vec{V}(A, k/j) + \vec{V}(A, j/i)$$

$$\vec{V}(B, k/i) = \vec{V}(B, k/j) + \vec{V}(B, j/i)$$

En appliquant la relation de changement de point, la seconde équation devient : $\vec{V}(A, k/i) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(k/i) = \vec{V}(A, k/j) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(k/j) + \vec{V}(A, j/i) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(j/i)$

En utilisant la première équation, les vitesses se simplifient et l'on obtient :

$$\overrightarrow{BA} \wedge \left(\vec{\Omega}(k/i) - \vec{\Omega}(k/j) - \vec{\Omega}(j/i)\right) = \vec{0}$$

Cette relation étant vraie quels que soient les points A et B, elle impose : $\vec{\Omega}(k/i) - \vec{\Omega}(k/j) - \vec{\Omega}(j/i)$, et on peut en déduire la relation de composition des vitesses de rotation :

$$\vec{\Omega}(k/i) = \vec{\Omega}(k/j) + \vec{\Omega}(j/i)$$

Cycle 5 – Modélisation de la cinématique d'un système complexe

Rappels et compléments mathématiques

1. Les vecteurs

1.1 Grandeurs physiques et vecteurs

Les théories de la mécanique utilisent des grandeurs mécaniques qui peuvent être mathématiquement représentées par des vecteurs (vitesse, position, accélération, force...). Ces vecteurs sont généralement des éléments d'espaces vectoriels euclidiens sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 noté $\mathcal{E}$, par conséquent munis d'une forme bilinéaire symétrique définie positive appelée *produit scalaire* et d'une application bilinéaire appelée *produit vectoriel* notés :

- Produit scalaire :

$$\begin{gathered}\mathcal{E}\times\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}\\(\vec{u},\vec{v}) \rightarrow \vec{u}.\vec{v}\end{gathered}$$

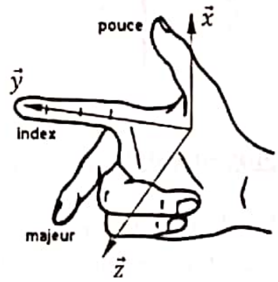
Remarque : on définit alors la norme d'un vecteur $\vec{u}$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$.

- Produit vectoriel :

$$\begin{gathered}\mathcal{E}\times\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}\\(\vec{u},\vec{v}) \rightarrow \vec{u}\wedge\vec{v}\end{gathered}$$

Remarque : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont normés et orthogonaux (soit $\vec{u}.\vec{v} = 0$), alors $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ forme une base orthonormée directe.

L'association de trois vecteurs non liés forme une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{E}$. On utilisera en SI uniquement des bases orthonormées directes $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ telles que :



$$\begin{gathered}\vec{x}.\vec{y} = \vec{x}.\vec{z} = \vec{y}.\vec{z} = 0 \text{ (orthogonalité)}\\\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = \|\vec{z}\| = 1 \text{ (vecteurs normés)}\\\vec{x}\wedge\vec{y} = \vec{z} \text{ (orientation directe)}\end{gathered}$$

Ces bases proposent un grand nombre de bonnes propriétés mathématiques.

Tout vecteur $\vec{V}$ de $\mathcal{E}$ est alors une combinaison linéaire des vecteurs de base :

$$\vec{V} = V_x.\vec{x} + V_y.\vec{y} + V_z.\vec{z}$$

V_x, V_y et V_z sont les composantes de $\vec{V}$ dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. On remarque pour une base orthonormale :

$$\left|\begin{array}{l}V_x = \vec{V}.\vec{x}\\V_y = \vec{V}.\vec{y}\\V_z = \vec{V}.\vec{z}\end{array}\right.$$

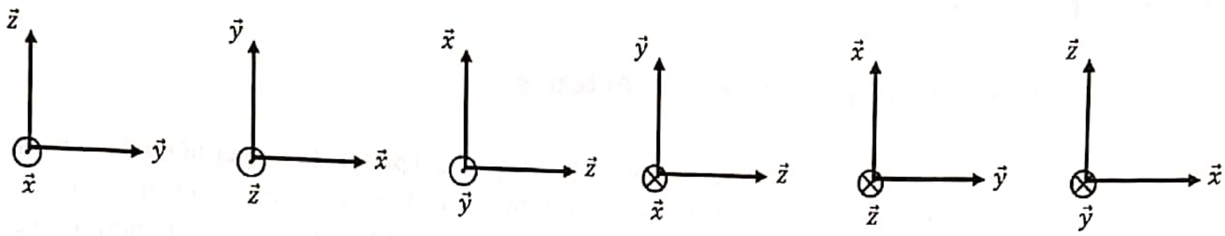
- <u>Représentation plane d'une base orthonormée :</u>

Deux des vecteurs sont représentés dans le plan. Le troisième vecteur est orthogonal au plan, il n'apparait pas dans une représentation plane, mais il est essentiel de faire apparaître son sens. En considérant la flèche suivante :

- Lorsque l'on regarde cette flèche de face, on voit : $\odot$
- Lorsqu'on la regarde de derrière, on voit : $\otimes$

On représente les vecteurs hors plans avec l'une de ces deux représentations.

Voici les différentes représentations planes possibles de la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ orthonormée directe :

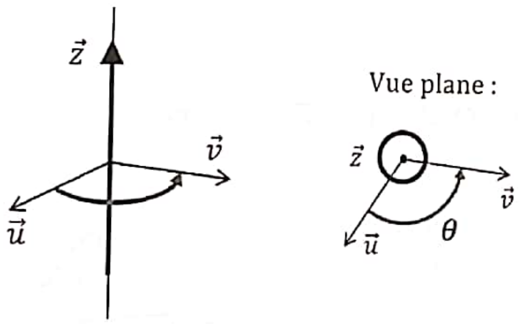


<u>Remarque :</u> on privilégiera toujours les représentations dans lesquelles le vecteur normal au plan est orienté « vers nous ».

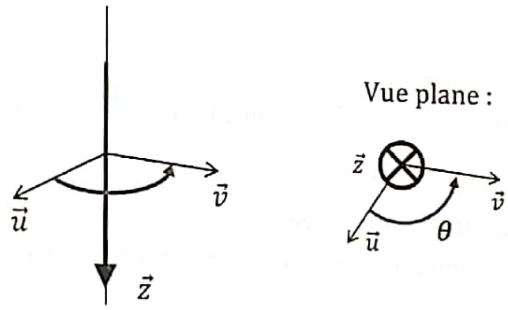
- <u>Orientation d'un angle par rapport à un axe :</u>

On peut définir, pour tous vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ un angle $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ orienté par un vecteur $\vec{z}$ normal au plan $(\vec{u}, \vec{v})$ et tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ soit une base directe (pas nécessairement orthogonale). L'angle θ est compté comme positif ou négatif en fonction du sens de l'axe $\vec{z}$:

<u>Sens positif autour de $\vec{z}$:</u>



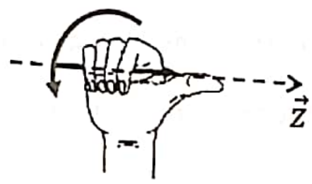
<u>Sens négatif autour de $\vec{z}$:</u>



<u>Moyen mnémotechnique :</u>

En alignant le pouce de la main droite repliée selon le vecteur orientant l'angle (ici $\vec{z}$), le sens positif de l'angle associé est indiqué par la courbure des doigts autour de l'axe (cf. schéma ci-contre).

Sens positif autour de $\vec{z}$



1.1 Produit scalaire

Le produit scalaire est défini à partir de l'angle $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ par la relation :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u}, \vec{v})}$$

On note de plus :

$$\begin{cases} Si\ \vec{u} \parallel \vec{v}, alors\ \vec{u}.\vec{v} = \varepsilon.\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \\ Si\ \vec{u} \perp \vec{v}, alors\ \vec{u}.\vec{v} = 0 \end{cases}$$

($\varepsilon = 1$ si les vecteurs sont de même sens et $\varepsilon = -1$ si ils sont de sens opposé)

D'autre part, le produit scalaire est défini par la relation entre les composantes (si elles sont toutes exprimées dans la même base) :

$$\text{Soit : } \vec{u} = {}_{\mathcal{B}}\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}, \vec{v} = {}_{\mathcal{B}}\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} \quad \text{alors} \quad \vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$$

Remarque : cette dernière relation sera très peu utilisée en SI.

1.2 Produit vectoriel

Le produit vectoriel est défini à partir de l'angle $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ par la relation :

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\vec{u}, \vec{v}).\vec{n}}$$

Où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tel que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ soit directe.

Le produit vectoriel admet les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u} \\ \vec{u} \wedge (\alpha.\vec{v} + \beta.\vec{w}) = \alpha.\vec{u} \wedge \vec{v} + \beta.\vec{u} \wedge \vec{w} \end{cases}$$

D'autre part, le produit vectoriel est défini par la relation entre les composantes (si elles sont toutes exprimées dans la même base) :

$$\text{Soit : } \vec{u} = {}_{\mathcal{B}}\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}, \vec{v} = {}_{\mathcal{B}}\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} \quad \text{alors} \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = {}_{\mathcal{B}}\begin{vmatrix} y_1.z_2 - y_2.z_1 \\ z_1.x_2 - z_2.x_1 \\ x_1.y_2 - x_2.y_1 \end{vmatrix}$$

Remarque : cette dernière relation sera très peu utilisée en SI car elle est particulièrement contraignante du fait de la nécessité d'exprimer les deux vecteurs dans la même base.

Dans une base orthonormée directe, l'utilisation des relations suivantes pourra être judicieuse pour gagner du temps :

$$\begin{cases} \vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z} & \vec{y} \wedge \vec{x} = -\vec{z} \\ \vec{y} \wedge \vec{z} = \vec{x} & \vec{z} \wedge \vec{y} = -\vec{x} \\ \vec{z} \wedge \vec{x} = \vec{y} & \vec{x} \wedge \vec{z} = -\vec{y} \end{cases}$$

1.3 Produit mixte

Le produit mixte est une forme tri-linéaire alternée :

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$$
$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \to \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Propriétés intéressantes du produit mixte :

- le produit mixte est invariant par permutation circulaire des vecteurs $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{w},\vec{u},\vec{v}) = (\vec{v},\vec{w},\vec{u})$
- le produit mixte change de signe par inversion de deux vecteurs $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -(\vec{v},\vec{u},\vec{w})$
- le produit mixte est invariant par inversion des opérateurs $\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$

1.4 Changement de base

Soient deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de $\mathcal{E}$ mobiles l'une par rapport à l'autre et $\vec{V}$ un vecteur de $\mathcal{E}$.

Soit les composantes de $\vec{V}$ dans $\mathcal{B}_1$: $\vec{V} = \left|\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{matrix}\right._{\mathcal{B}_1}$

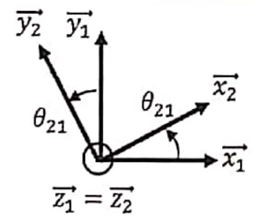
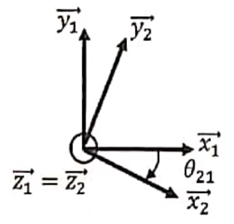
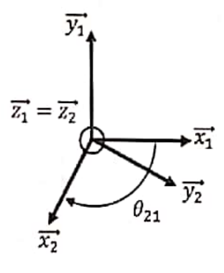
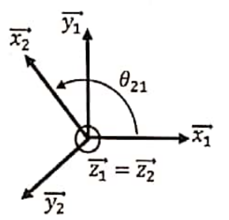
Changer $\vec{V}$ de base consiste à déterminer les composantes de $\vec{V}$ dans $\mathcal{B}_2$: $\vec{V} = \left|\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{matrix}\right._{\mathcal{B}_2}$

Le mouvement de $\mathcal{B}_2$ par rapport à $\mathcal{B}_1$ est caractérisé par trois rotations élémentaires. En SI, on décompose toujours les rotations en rotations élémentaires autour d'un vecteur de la base et on projette dans ces bases successives.

Exemple : $\mathcal{B}_2$ en rotation d'angle θ_{21} autour de $\vec{z_1}$ par rapport à $\mathcal{B}_1$. Cette définition est toujours traduite par une figure de projection telle que celles ci-dessous, où on commence par placer les repères comme sur la figure, puis l'axe de rotation, l'angle et enfin on complète les bases dans le sens direct.

Remarque importante : deux points essentiels sont à respecter lors de la réalisation des figures de projection, pour limiter les risques d'erreur :

- Les angles doivent être représentés dans le sens positif (cf. page 2, « Orientation d'un angle par rapport à un axe »),
- Les angles doivent être représentés avec une valeur appartenant à l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

<table>
<tr><th>Représentation conseillée :</th><th colspan="3">Représentations déconseillées :</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td>Représentation possible quelle que soit la configuration du mécanisme dans le problème traité</td><td colspan="2">$\theta_{21} < 0$, il y a un risque d'inversion de signe sur son sinus</td><td>$\theta_{21} > \frac{\pi}{2}$, les projections sont moins lisibles</td></tr>
</table>

En utilisant la représentation conseillée, on obtient rapidement :

$$\vec{x_2} = \cos\theta_{21}.\vec{x_1} + \sin\theta_{21}.\vec{y_1} \qquad \vec{x_1} = \cos\theta_{21}.\vec{x_2} - \sin\theta_{21}.\vec{y_2}$$

$$\vec{y_2} = -\sin\theta_{21}.\vec{x_1} + \cos\theta_{21}.\vec{y_1} \qquad \vec{y_1} = \sin\theta_{21}.\vec{x_2} + \cos\theta_{21}.\vec{y_2}$$

1.5 Dérivation d'un vecteur par rapport au temps

La dérivation des vecteurs en fonction du temps nécessite une base de dérivation. Si $\vec{u}(t)$ est un vecteur fonction du temps, sa dérivée par rapport à une base $\mathcal{B}_0$ s'écrit :

$$\left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{\mathcal{B}_0}$$

En exprimant les composantes de $\vec{u}(t)$ dans $\mathcal{B}_0$ (chacune étant une fonction du temps), on calcule la dérivée de $\vec{u}(t)$ dans $\mathcal{B}_0$ en dérivant chacune des composantes par rapport au temps :

Si : $\vec{u}(t) = x_0(t).\overrightarrow{x_0} + y_0(t).\overrightarrow{y_0} + z_0(t).\overrightarrow{z_0}$, alors : $\left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{\mathcal{B}_0} = \dot{x}_0(t).\overrightarrow{x_0} + \dot{y}_0(t).\overrightarrow{y_0} + \dot{z}_0(t).\overrightarrow{z_0}$

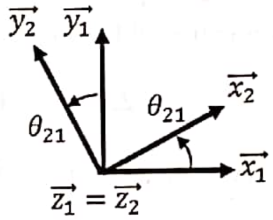
Ce type de calcul nécessite cependant de projeter $\vec{u}(t)$ dans la base $\mathcal{B}_0$ avant de dériver. Cette opération peut être lourde en calculs lorsqu'il y a plusieurs bases. Pour cette raison, on n'utilisera jamais en SI cette méthode pour dériver.

Lorsqu'un système présente plusieurs bases mobiles les unes par rapport aux autres, il est souvent très intéressant de changer la base de dérivation (par exemple pour se déplacer dans une base où le vecteur est fixe). On peut montrer la relation de changement de base de dérivation :

Soit deux bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$. Pour tout $\vec{u}(t)$ vecteur de l'espace :

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{\mathcal{B}_0} = \left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0) \wedge \vec{u}(t)}$$

où $\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)$ est le ***vecteur vitesse de rotation de $\mathcal{B}_1$ par rapport à $\mathcal{B}_0$*** (vecteur parallèle à l'axe de rotation et ayant pour norme la vitesse de rotation en [rad/s]).



__Exemple :__ $\mathcal{B}_2$ en rotation d'angle θ_{21} autour de $\overrightarrow{z_1}$ par rapport à $\mathcal{B}_2$, alors

$$\vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1) = \dot{\theta}_{21}.\overrightarrow{z_1}$$

L'angle θ_{21} représente la rotation de la base $\mathcal{B}_2$ ***par rapport*** à la base $\mathcal{B}_1$, il est donc ***orienté de 1 vers 2*** (de $\overrightarrow{x_1}$ vers $\overrightarrow{x_2}$ et de $\overrightarrow{y_1}$ vers $\overrightarrow{y_2}$).

__**Propriétés de dérivation des vecteurs :**__

Somme : $\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V_1(t)} + \overrightarrow{V_2(t)}\right)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_1(t)}\right]_R + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_2(t)}\right]_R$

Produit par une fonction scalaire $f(t)$: $\left[\frac{d}{dt}\left(f(t).\overrightarrow{V(t)}\right)\right]_R = f(t).\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V(t)}\right]_R + \overrightarrow{V(t)}.\frac{df(t)}{dt}$

Dérivée du produit scalaire : $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V_1(t)}.\overrightarrow{V_2(t)}\right) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_1(t)}\right]_R.\overrightarrow{V_2(t)} + \overrightarrow{V_1}(t).\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_2(t)}\right]_R$

Dérivée d'un produit vectoriel : $\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V_1(t)} \wedge \overrightarrow{V_2}(t)\right)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_1(t)}\right]_R \wedge \overrightarrow{V_2(t)} + \overrightarrow{V_1(t)} \wedge \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_2(t)}\right]_R$

2. Les torseurs

2.1 Définition

On appelle Torseur $\{\mathcal{T}\}$ l'ensemble d'un champ de vecteurs antisymétrique $\vec{M}$ et d'un vecteur $\vec{R}$ associé. $\vec{R}$ est appelée la résultante et $\overrightarrow{M_A}$ le moment en A.

Pour définir complètement un torseur, il suffit de préciser sa résultante et son moment en un point quelconque A de l'espace. Ces deux vecteurs sont alors appelés les ***éléments de réduction*** du torseur en A. On note le torseur $\{\mathcal{T}\}$ comme suit :

$$\{\mathcal{T}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} R_x.\vec{x} + R_y.\vec{y} + R_z.\vec{z} \\ M_{A,x}.\vec{x} + M_{A,y}.\vec{y} + M_{A,z}.\vec{z} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} R_x & M_{Ax} \\ R_y & M_{Ay} \\ R_z & M_{Az} \end{Bmatrix}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Le torseur nul est un torseur dont la résultante et le moment sont nuls en au moins un point M.

2.2 Propriétés – Relation de changement de point

2.2.1 Champ antisymétrique

Un champ de vecteurs $\vec{M}$ est antisymétrique si, et seulement si, pour deux points A et B quelconques de l'espace, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}}$$

C'est cette propriété des champs antisymétriques qui nous permettra de calculer les coordonnées du torseur en différents points. Cette relation est à connaître absolument.

2.2.2 Champ équiprojectif

Un champ de vecteurs $\vec{M}$ est équiprojectif si et seulement si pour tous points A et B, on a :

$$\overrightarrow{M_B}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{M_A}.\overrightarrow{BA}$$

Le théorème de Delassus nous dit alors que :

Tout champ antisymétrique est équiprojectif et réciproquement.

2.3 Somme de deux torseurs

Soient deux torseurs $\{\mathcal{T}_1\}$ et $\{\mathcal{T}_2\}$ tels que : $\{\mathcal{T}_1\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_{A,1}} \end{Bmatrix}_A$ et $\{\mathcal{T}_2\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_{A,2}} \end{Bmatrix}_A$

Soit $\{\mathcal{T}_S\}$ la somme des deux torseurs. Alors la résultante $\overrightarrow{R_S}$ est égale à la somme des résultantes $\overrightarrow{R_1}$ et $\overrightarrow{R_2}$ et le moment $\overrightarrow{M_{A,S}}$ exprimé en A est égal à la somme des moments $\overrightarrow{M_{A,1}}$ et $\overrightarrow{M_{A,2}}$, **exprimés en A**.

$$\{\mathcal{T}_S\} = \{\mathcal{T}_1\} + \{\mathcal{T}_2\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_{A,1}} + \overrightarrow{M_{A,2}} \end{Bmatrix}_A$$

Attention : Sommer deux torseurs dont les éléments de réduction sont exprimés en des points différents n'a aucun sens !

2.4 Multiplication d'un torseur par un scalaire

Soit $\{\mathcal{T}_1\}$ le même torseur que précédemment et α un réel. Alors :

$$\{\mathcal{T}_2\} = \alpha.\{\mathcal{T}_1\} = \begin{Bmatrix} \alpha.\overrightarrow{R_1} \\ \alpha.\overrightarrow{M_{A,1}} \end{Bmatrix}_A$$

2.5 Comoment de deux torseurs

On appelle comoment de deux torseurs $\{\mathcal{T}_1\}$ et $\{\mathcal{T}_2\}$ la quantité scalaire telle que :

$$\{\mathcal{T}_1\} \otimes \{\mathcal{T}_2\} = \overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_{A,2}} + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_{A,1}}$$

Comme pour la somme, les moments des torseurs **doivent impérativement être exprimés au même point**. Mais le résultat ne dépend pas du point A choisi.

2.6 Automoment d'un torseur

On appelle automoment $\mathcal{A}$ d'un torseur $\{\mathcal{T}_1\}$ la moitié du comoment de ce torseur par lui même :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}.\{\mathcal{T}_1\} \otimes \{\mathcal{T}_1\} = \overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_{A,1}}$$

2.7 Axe central d'un torseur

On appelle axe central d'un torseur $\{\mathcal{T}\}$ l'ensemble des points I pour lesquels le champ $\vec{M}$ est colinéaire à $\vec{R}$. Soit : $\overrightarrow{M_I} = \alpha.\vec{R}, \alpha \in \mathbb{R}$.

On remarque que l'axe central est toujours une droite parallèle à $\vec{R}$.

2.8 Torseurs particuliers

2.8.1 Torseur glisseur

Un glisseur est un torseur dont l'automoment est nul avec $\vec{R} \neq \vec{0}$.

Le moment est donc toujours perpendiculaire à la résultante et il est nul sur l'axe central pour ce type de torseur.

2.8.2 Torseur couple

Un couple est un torseur dont la résultante est nulle : $\vec{R} = \vec{0}$.

Le moment est donc constant en tout point de l'espace et il n'y a pas d'axe central pour ce torseur.